皮尔士对康托连续统的哲学批判

张留华[1,2]

(1. 华东师范大学 哲学系,上海 200241; 2. 上海浦东新区区委党校,上海 200135)

摘　要: 皮尔士对于康托连续统给予高度评价,同时又从概念层面上予以批判。他从逻辑学考察出发,指出康托连续统并非几何直观意义上的连续统,因而是"伪连续统"。皮尔士依据无穷小理论所界定的非度量性的连续统观念,为现代数学的基础批判提供了有益启示。

关键词: 皮尔士; 康托; 连续统; 概念

中图分类号: B026　　文献标识码: A　　文章编号: 1674 - 7062(2011)02 - 0066 - 05

连续统(continuum 或 continuity)是数学及哲学中一个极其重要而又复杂的概念。或许正因为如此,有关争论旷日经久,至今尚无定论。在当代,连续统概念之所以备受关注,则主要是由于康托及其集合论。康托集合论意义上的连续统既赢得了同时代数学家的支持,也遭到了反对。美国数学家、逻辑学家、哲学家 C. S. 皮尔士对于康托的连续统观念颇为关注,并与康托有过通信往来; 不过,后来他又明确指出康托观念的错误所在。虽然康托集合论今天在某种程序上已被视为"数学正统",但与此同时皮尔士连续统观点作为康托无穷观的主要竞争理论之一也正在更广泛领域受到"同情"。从哲学义理上梳理二人关于连续统观念的差异和冲突,特别是皮尔士对于康托立场的回应和反思,有助于我们在康托之后更清晰、更全面地把握连续统的真实本性。

一　皮尔士的集合论贡献及其不同动机

连续统概念在康托那里指实数集,也就是人们常说的"在实数集里实数可以连续变动"; 而康托对于现代集合论的贡献正是源于他对于实数的严格构造。在康托的同时代,我们看到,皮尔士运用不同的术语表达着与康托集合论惊奇相像的许多思想。早在 1881 年,皮尔士在为《美国数学杂志》所撰写的一篇文章中把连续性定义为"其中,每一个比另一个大的量也大于某个比这另一个大的中间量",[1]3.256这大致相当于现代数学中的稠密性(无限可分性)。大约 1884 年,皮尔士初次阅读到康托法文版的《集合论的基础》并对于作者给予很高评价,认为"他无可争议是有关数的数理逻辑学说的首倡者。"[1]4.331在随后发表的几篇文章中,皮尔士提到了实数的不可枚举性以及康托的证明: 对于任何有穷 n,n 维空间 R^n 具有与实数 R 一样的势; 还给出了对于 N 的幂集的不可枚举性的证明。尤其是在 1897 年,他独立证明了"康托定理": 对于任意指数 N,$2^N > N$。他的证明方法除了表现方式更为生动,其实质与康托 1891 年的论证是一样的"我先要问,把集合中诸对象分配到两个房间的可能方式之数量是否能等于这些对象的数量。如果能相等的话,假设存在如此数量的儿童。那么,他们每一个都只有一种愿望,他们的愿望可以是每一种可能的分配方式。然而,不论实际上如何分配,总会有某个儿童完全得到满足。但是,询问每一个儿童他自己想要在哪一个房间,然后把每一个儿童分配到他不想要去的房间。这样便没有一个儿童能感到满意。因此,认为某个集合在数量上等于其对象分配到两个房间的可能方式,这是荒唐的。"[1]3.548此外,皮尔

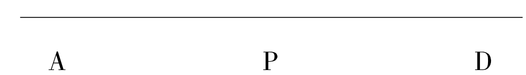
【收稿日期】 2010 - 06 - 10
【作者简介】 张留华(1976 -),男,河南周口人,华东师范大学哲学系博士生,上海市浦东新区区委党校副教授,研究方向为逻辑哲学、科学方法论。

士似乎毫不犹豫地规定 $2^{\aleph_0}$ 是比 $\aleph_0$ 大的最小数量，他将其称为 primipostnumeral(第一不可数量) ，并相信有比实数在势上更高的、各种等级的超穷数。他还曾试图证明连续统假设，并且更多时候直接假定广义连续统假设为真。[2]514－5

不必罗列皮尔士更多、更详细有关康托集合论的贡献，这里我们所关注的是皮尔士在了解康托的连续统观念后他自己接着又做了些什么。应该承认，康托集合论对于皮尔士深入思考连续统给予了莫大激励，而且他在一段时期基本接受了康托的许多思想。但是，作为逻辑学家、哲学家的皮尔士很快认识到康托连续统的问题所在，早在 1897 年他就指出“对于连续性概念，需要有一种十分满意的逻辑说明。这涉及到对于某种无穷进行界定，而且为了对其加以澄清，需要首先发展无穷数量(multitude) 的逻辑学说。在康托、戴德金等人的工作之后，这一学说仍旧处于不成熟状态。”[1]3.526在皮尔士与康托“局部相仿”的有关连续统的论述背后，我们看到二人的出发点和研究动机有着明显不同。康托的集合论工作源自他对于三角级数表示法的研究，他的动机在于数学分析，更确切地说，是在于对连续统的算术研究。与之相比，皮尔士则采取完全不同的路径。他的兴趣不是要探查数学的基础以便找到函数理论由以出发的某种稳固起点，相反他研究连续统却是因为其追求对于布尔逻辑的改进。从一开始，皮尔士对于连续统的关注就是对德摩根换量三段论的逻辑涵义(譬如，每一位霍屯督人都杀害一位霍屯督人，没有霍屯督人是由一个以上霍屯督人所杀害的; 因此，每一位霍屯督人都是由一位霍屯督人所杀害的; 这个三段论只有在霍屯督人集为有穷时才成立①) 以及关系逻辑的思考。很多时候，他不太关心他的那些思想的算术特性，因为它们作为数的存在对于他并不具有重要性。他的兴趣更多是一种逻辑问题，从概念层面上来看，皮尔士认为康托连续统是一种“不完美连续统”或“伪连续统”。下面，我们以实数线以及无穷小这两个基本问题为例进行分析，将能进一步看清皮尔士对于康托连续统的异议。

二　数、线及点

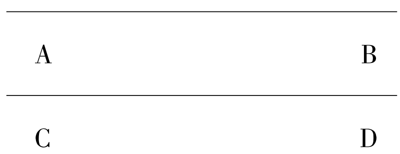
有关康托连续统观念的一种直观表述是: 连续统是点的集合，而实线作为连续统正好与实数集同构，即线上的每一个点对应着每一个实数，线的划分犹如实数的划分一样。对此，康托集合论的另一位代表人物戴德金运用所谓的“戴德金分割定理”形象地给出了界定: 如果我们把实数从任意点 P 处分成 L(左) 和 R(右) 两部分，那么每一个实数正好属于二者之一。换言之，如果一个数属于 R，则每一个比它大的数也都属于 R; 而如果一个数属于 L，则每一个比它小的数都属于 L。如此一来，可以断定: 要么 L 有一最大数，要么 R 有一最小数，但不可能二者同时成立。



当我们把这种思想直接应用在直线上时，其结果可进一步明朗化。如上图所示，直线 AD 被从 P 点处分割，P 点必须要么包含在 L 部分要么包含在 R 部分内。在每种情况下，都会出现有一半直线不带类似 P 那样的端点。因此，如此划分所产生的两半不可能互为映像。但是，这种结果显然是违反直觉的。基于此，哥德尔对于实数与几何线的同构性表示怀疑: 他认为，至少直观上看，几何线可能并不遵守戴德金分割定理。普特南指出，这种异议所表现的实际上是一种古老的亚里士多德观点。[3]248－9在亚里士多德看来，线是不可还原的几何对象而非某种更基本对象(譬如标准点) 的集合。在线被分割成两部分时，要问分割点属于哪个部分是毫无意义的，因为点虽然在线之上但它们并不属于线，线上的点不过是对于线的概念划分。我们可进一步假设如下图所示，在从 P 点把直线分成两半后，我们令右半部分稍微向下平移，从而把两部分分离开来。根据亚里士多德的观点，这不能视为一点集向另一点集的一一对应，而只能作为一种基本的几何变形。因而，端点 A 和 D 并非直线 AD 的元素，而只不过是一种抽象属性: 由于我们所画直线终结于此而特别放置在那里的点。而且原直线 AD 的左半部分 AB 以及右半部分 CD 仍旧有两个端点，因为任何直线区间只要存在就必然具有端点。看起来，B、C 两个端点必然有一个是原来的、另一个是新增的; 但事实上，这不过是把原来的 P 点分成了两个点，或者说，P 点映射到 B、C 两个点上，B、C 两个点互为映像。虽然作为线上“实数元素”的点不可能一分为

① 这种换量三段论作为一种原理，接近于欧几里德公理即整体必须大于其任何一部分; 二者都仅仅对有穷量才成立。这里，皮尔士通过换量三段论这种特定论证形式来界定有穷与无穷的这种做法，被认为比戴德金更早地提供了有关无穷的技术定义。此外，他还独立于康托，运用费马推理或数学归纳法这种特定论证形式区分开可数无穷集和不可数无穷集。

二，但作为“抽象属性”的分割点却可以多次设立。[4]38-41



在某种意义上，皮尔士关于连续统的观点正是亚里士多德观念的现代版本。皮尔士明确反对康托关于几何①连续统由算术上阿基米德点的集合构成的观点。康托的定义“有赖于度量考虑; 然而连续系列与非连续系列之间的区分显然是非度量的”[1]6.121。直线的部分并非不可分的点，而是线段; 任何线段的部分仍旧是线段，至少也可称为无穷短的线段。同时他认为，构成实线的那些点的数量必定远远大于任何康托所设想的集合，实线必定包含了所有可能的连续点，而实数集 R 只是对应于 2^{N_0}所代表的数量，因此它作为一种完成量(as a completed multitude) 不可能解释连续统的本性。此外，在连续统的任何两点之间，无论它们有多么紧密，总是可以插入更大数量的点; 因此，最终连续统实际上是由非离散的点“黏合在一起的”。② 对此，皮尔士引入运动知觉来加以说明，他指出，时间必定不仅仅是瞬间的系列，在我们意识中所出现的必定不仅仅是单个的、孤立的点状“瞬间照片”。在我们的时间感觉中，瞬间如此紧密以至于融为一体而难以区分。纵使有任意大量的独立瞬间，其间都仍存在空隙。正是这种时间观帮助皮尔士解决了芝诺悖论，同时也直接影响了他在集合论中的连续统观点。表面上看，一方面线上存在有点，另一方面点并不具有独立性，这似乎是矛盾的。但在他看来，正如时间分布彼此相融而难以辨识一样，线上的点同样也如此，它只是潜在的点而已。他相信，数目(numbers) 本身不可能完全解释连续统，数目所表达的不过是离散对象的序，而任何离散量不论有多大都不能充分说明线的连续性。“使线具有连续性的是，它总有可能覆盖大于任何既定量的点，或换句话说，事实上在线上任一部分都存有任意数量的空间。”[1]3.568康托的超穷数系列(N_0，N_1，N_2，…) 其中每一个都不能代表连续统的势，顶多可以说在该系列中越往后面的超穷数越接近连续统所代表的量。真正的连续统必定包含了无边无际的大量失去个体性的点，它在绝对性上类似于我们今天在 NBG 系统中所讲的“真类”，或者用皮尔士的话讲，是一种“超级量”。③这里，连续统所呈现的非离散性、非确定性、潜在性、非完成性，或许正是上文皮尔士在谈到康托连续统观点的不足时认为有待从逻辑上加以发展的地方。构成连续统的成分不再是独立可分辨的对象(subjects) ，而是表示连续统属性的诸相位(phases) ，而每一相位只是逻辑可能性的一种实现。在更为广泛的哲学语境下，皮尔士把这种连续统看做一种一般性，认为它是“关系的一般性”(a General of relation) 。[5]141一般性的概念与确定性的个体之间的关系，好比连续性的线与离散性的点。

也正是由于连续统的这种潜在性，皮尔士在布劳威尔之前就意识到排中律可能会在无穷领域受到质疑。以一个思想实验为例。一张白纸上有一滴墨水。当然，墨水覆盖的地方是黑色的，其他未覆盖的地方是白色的。但问题是，墨水与白纸之间的边界点是黑色的还是白色的? 如果这些点是现实性的，它们必然要么为黑色要么为白色。不过，皮尔士认为，这些边界点并不是现实存在，而仅仅是一种潜在性，因此对于它们来说并非必然要么为黑要么为白。皮尔士强调，“只有在它们连接起来成为连续性的平面时，那些点才是有色彩的; 单独来看，它们并无色彩，而且既非黑又非白，任何色彩都不是。”[1]4.127

三　无穷小的地位

与点线问题密切相关的一个问题是无穷小在数学上的地位。康托一贯反对无穷小思想，他并不认为实数中除了有理数、无理数还有其他类型的数。他虽然坚持存在超穷数这一无穷大的数，但认为并不能由此推出实际上也存在无穷小; 他曾基于所谓线性数的阿基米德特性证明了无穷小的逻辑不可能

---

① 传统上的一种观点认为，几何学主要关注连续性的物，而算术(代数) 主要关注离散性的量。

② 显然，这里的连续统已经不再是康托意义上的集。从某种意义上看，皮尔士的集合(collection) 概念更多类似于逻辑学中的论域; 而皮尔士认为，虽然通常论域都是离散集合，但实际上论域也可以是连续性的。这种立场涉及皮尔士的模糊逻辑。

③ 有研究者指出，皮尔士关于非集合连续统及其超大基数的观点与 1904 年寇尼格试图证明连续统的势并非阿列夫的做法具有某种相似性。

性①,后来还曾批评意大利数学家 G. 韦罗内塞所发表的无穷小学说,认为它们是“数学中的霍乱菌”。在康托看来,无穷小理论就相当于化圆为方,既是绝对不可能的,又是十分荒谬的。对于康托为何要坚决反对无穷小,美国著名数学史专家 J. 道本指出,一旦承认无穷小,那将会令康托的连续统假设($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) 极其复杂; 在有理数和无理数之外又允许出现无穷小,这也会使得他关于连续统的势的猜想更加复杂。[6]126

但在皮尔士那里,由于他选择了非阿基米德数学路线,无穷小的存在似乎是很自然的。皮尔士认为,正如我们在线上的有理数点之间插入不可列的无理数点一样,我们也可在无理数点之间插入 secundopostnumeral(第二个不可数量的) 的点。这里的 secundopostnumeral 集就涉及无穷小。他相信,要证明不存在无穷小这样的量,是不可能的; 在数学中接受无穷小,这并不具有矛盾性。事实上,无穷小的存在对于物理学是必然的。为了支持他关于无穷小的物理实在性的主张,皮尔士提到了记忆这一经验。他说,对时间之流的知觉必定超越任一单个瞬间。只有把时间看做是无穷小的,否则我们便无法理解此种现象的“平滑性”。甚至,皮尔士还将无穷小用于进一步的形而上学思辨: 他认为,自然界有物质单子也有灵魂单子,而灵魂单子的直径却是无穷小,正因为如此,我们才能解释灵魂的特性。

在驳斥康托的连续统定义后,皮尔士试图对连续性给出一种不涉及极限学说②的特定意义。根据这种新的连续统观念,其中一点很重要,即连续性的线是由无穷小部分组成的。皮尔士写道 “在连续性区域譬如连续性的线上存在有无穷短的连续着的线条。事实上,整个线是由这样的无穷小分部构成的。”[7]103我们不妨再回到上文中的直线 AD 被 P 点所划分的例子。在经过右移后,P 点“变成”了 B、C 两个点。在亚里士多德看来,这种转变之所以可能,是因为 P 点是抽象属性; 在此基础上,皮尔士则进一步认为: 在线上的单个点之内,我们可以至少找到 C(实数集的势) 个不同的点部(point parts) ③,而线上点的基数不仅要超过 C 而且要超过所有集合的基数。换句话说,他相信,线上的点是比实数更高的无穷序。而这便意味着在线上存在有一种更为细致但却不可忽视的非标准点即无穷小。康托的连续统 R 不可能包括全部的点,真正的连续统既包含非连续性的有理数、无理数,又包含作为“额外可能性”的无穷小量。④而且,正是这些无穷小构成了各种未实现的潜在性、未分化的模糊性、未确定的可能性。由是,鉴于无穷小的潜在性,“P 点变成了 B、C 两个点”便不难理解。B、C 等点在划分之前是融合在一起的,而构成如“粘胶剂”一样的“直接联系”作用的正是“如同时间一样”的无穷小⑤。从某种意义上可以说,连续统不仅是一个数量大小问题(即多样性) ,而且关系到诸部分之间的联结方式(即统一性) 。因为,“把沙粒弄得越来越碎,只会令沙子更加破碎。它不会把那些颗粒融合为完整无缺的连续体。”[1]6.168

值得一提的是,皮尔士在近代数学中比较早地重视和运用无穷小概念。但直到 20 世纪 60 年代 A. 罗宾逊等人提出“非标准分析”,无穷小概念才真正开始在数学研究中得到重视。最近,也有学者提出,皮尔士关于无穷小的分析,与当代数学中的平滑无穷小分析(Smooth Infinitesimal Analysis) 理论具有更多相关性。

四 结语

总体来看,本文认为,虽然从正统数学内部来

---

① 实际上,关于无穷小的不存在,康托最终并未能够给出足够有信服力的细致论证。正如数学哲学家所指出的,康托认为其对手们的工作“漂浮不定或更多只是胡说”而且包含有“恶性循环”,但不幸的是他自己的立场也并无二样。(I. Grattan - Guinness,The Search for mathematical roots 1870 - 1894,Princeton University Press,2000,p. 122) 数学哲学家 J. 道本在考察了康托对于无穷小的无情指责后指出,“具有讽刺意味的是,康托对于无穷小的许多批评完全也可以有效地指向超穷数。”(Joseph Warren Dauben,Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite,Princeton University Press,1979,p. 131) 康托在驳斥其对手通过否认阿基米德公理来产生无穷小的论证中事先假定数的线性特征并以此推导出阿基米德特性,他在一开始就排除了无穷小的可能性,恰恰也犯了“预期理由”的谬误。

② 自从 19 世纪柯西、博尔查诺、维尔斯特拉斯等人的工作之后,所谓微积分(infinitesimal calculus) 一直奠基在一个与无穷小毫无关系的理论基础——极限学说——之上,而有时之所以继续沿用此种表达往往只是对笛卡儿、牛顿、莱布尼兹等人用词的传统沿袭。

③ 为了突出无穷小的非原子性,有学者倾向于运用“非点”(nonpunctiform) 来刻画皮尔士的这种无穷小。

④ 康托所证明的实数 R 的“完全性”只能在不包含无穷大或无穷小元素的阿基米德数学内才成立。

⑤ 有关无穷小地位的一种比较直观的明证是: 曲线正是由无穷小的直线构成的。

看，皮尔士关于连续统的集合论分析难以与康托相媲美，但他在康托基础上关于连续统更为系统、更为丰满的哲学考虑却为我们提供了大量有价值启示。有数学家指出，数学历来有确切性（cogency）和全面性（comprehensiveness）两种理想；或许我们可以说，皮尔士更注意的是在全面性数学的道路上往前走。[8]9皮尔士在关于连续统的学说中，既注重算术（度量）方面又注重几何（拓扑）方面，既看重简洁性（严格性）又看重真实性（常识性），既关注数学本身又关注逻辑－形而上学，他致力于把亚里士多德、康托等人连续统观点融会相济的做法为我们提供了一种综合而兼顾性的尝试路线。

应该承认，皮尔士关于连续统的观点不够集中，而且至今仍有不少遗留问题，甚至他根本"就没有一个完整的连续统定义"[9]；但不能忘记，关于康托集合论的基础，在过去是一个远比今天更具争议性的话题。一位19世纪逻辑史专家在对林林总总的集合观念进行考察后曾不禁感慨"不是说首先对于集合这一基本概念进行澄清并达成共识，逻辑学家和数学家们宁愿——或许这样是对的——快速提炼和修正出尽可能接近康托的形式理论，并善意地忽略掉康托自己的形而上学议题及任何其他广泛的哲学关切。在弗雷格、施罗德、罗素甚至康托和豪斯道夫也拒绝步入或只是踌躇涉足的地方，我们已经欢呼着闯进其中，之所以有这样的勇气仅仅是因为我们在传统上越来越缺乏基础批判。"[10]大凡基础概念都是棘手的，对于它们，往往不会有一蹴而就的技术处理，我们所需要的是永远保持一种批判的、开放的态度。康托连续统无疑为我们提供了对于无穷问题的一种极其简洁的刻画处理；但其概念上的问题并不能因此而受到掩盖。随着现代拓扑学（尤其是无点拓扑学）和范畴论方法的推广，皮尔士的连续统思想正越来越多地得以诠释和理解。可以相信，对于"皮尔士方案"的理解，将有助于我们对于康托等正统数学思想"未尽之义"的反思和完善。

【参 考 文 献】

[1] Peirce C S. Collected Papers of C S Peirce(vol. 1 – 8) [M]. Cambridge: Harvard University Press，1931 – 1958.

[2] Myrvold W. Peirce on Cantor's Paradox and the Continuum [J]. Transactions of the Charles S. Peirce Society，1995 (3).

[3] 亚里士多德. 亚里士多德全集: 第2卷 [M]. 北京: 中国人民大学出版社，1991.

[4] Peirce C S. Reasoning and the Logic of Things [M]. Cambridge: Harvard，1992.

[5] Zalamea F. Peirce's Logic of Continuity: Existential Graphs and Non – Cantorian Continuum [J]. The Review of Modern Logic，2001 – 2003，9(1 & 2).

[6] Dauben J. Peirce's Philosophy of Infinite Sets [J]. Mathematics Magazine，1977(3).

[7] Havenel J. Peirce's Clarifications of Continuity [J]. Transactions of the Charles S Peirce Society，2008(1).

[8] Johanson A. Modern Topology and Peirce's Theory of the Continuum [J]. Transactions of the Charles S Peirce Society，2001(1).

[9] Potter V，Shields P. Peirce's Definitions of Continuity [J]. Transactions of the Charles S Peirce Society，1977(2): 20.

[10] Dipert R. Peirce's Philosophical Conception of Sets [C] // Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce. Indianapolis: Indiana University Press，1997: 56.

Peirce's Conceptual Critique of Cantor's Continuum

ZHANG Liu – hua[1,2]

(1. *East China Normal University Department of Philosophy*，*Shanghai* 200241，*China*；
2. *Pudong New Area Administration Institute*，*Shanghai* 200135，*China*)

Abstract: While appreciating highly Contor's Continuum，Peirce criticized conceptually Cantor's mathematical characterization. Basing on a logical consideration，he conceived Contor's Continuum as pseudo – continuum in that it is inconsistent with the geometrical intuition of continuum. Peirce's non – metric approach gives much illumination on the foundational critique of modern mathematics.

Key words: C. S. Peirce; Cantor; continuum; conception

（责任编辑　魏屹东）